数理解析研究所講究録
74巻 1969年 83-88

(Free talking)

不連続なマルチンゲールについて

東工大 理　土谷 正明

§1. 序

これは、フリートーキングで、話したことに、少々付け加えたものである。

2乗可積分、不連続なマルチンゲールの作る空間 $\mathcal{M}$ に留意して、その不連続な部分空間 $\mathcal{M}_d$ の構造が、S. Watanabe [4] (additive functional の場合), H. Kunita & S. Watanabe [1] (Hunt process の上の $\mathcal{M}_d$ の場合) において、明らかにされ、種々の応用が、そこでなされている。

最近、P. A. Meyer が [2] において、マルチンゲールの確率積分の拡張をしている。

それが、どの位の拡張になっているかということが、$\mathcal{M}_d$ の表現と関連して与えることが出来る。(Theorem 1)

これは最初、本尾氏が予想されたことである。

これを additive functional の場合にみてみると、もう少し、具体的な形で与えられる (Theorem 3)。

そこで、渡辺信三氏の結果[4]の $\mathcal{M}_d(A)$ の表現に類似の表現が得られる。その間の関係もある程度分る。

しかし、Theorem 3 の表現を得るとき、[4]の結果を使用しないと、今のところ証明出来ない。

§2. マルチンゲールの場合.

notation, definition については詳しくは、P.A. Meyer [2] を参照のこと。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$; complete separable probability space.

$(\mathcal{F}_t)$; increasing family of sub σ-fields of $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \equiv \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

$\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の null set をすべて含む.

更に、$(\mathcal{F}_t)$ は不連続時間をもたないことを仮定する。

i.e. $\forall T_n \uparrow T$ (stopping time の列), $\mathcal{F}_T = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$

考える process は、すべて $(\mathcal{F}_t)$-well adapted として、マルチンゲール等はすべて、$(\mathcal{F}_t)$ に関して考える。

◦ process $\{X_t\}$ が very well measurable (well measurable) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(t, \omega) \rightsquigarrow X_t(\omega)$ は、左連続（右連続）、右極限（左極限）をもつ process を可測にする $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の最小の σ-field に関して、可測となる。

$\mathcal{M} \equiv \{$2乗可積分、右連続なマルチンゲール$\}$

$\mathcal{A}^+ \equiv \{$ 右連続 increasing process (A_t) ; $A_0 = 0$, $E(A_t) < +\infty$ $\forall t \geq 0\}$

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+ \equiv \{A = A^1 - A^2 \ ; \ A^i \in \mathcal{A}^+ \quad i = 1, 2, \}$

$\mathcal{M}_c \equiv \{\mathcal{M}$ の元で連続なもの $\}$

$\mathcal{A}_c^+$, $\mathcal{A}_c$ も同様に定義する.

知られていることを以下にあげる. $\mathcal{M} \ni X$. $X_0 = 0$ としておく.

◎ $\forall X, Y \in \mathcal{M}$ に対し, $\exists_1 \langle X, Y \rangle \in \mathcal{A}_c$;

$$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t = \text{martingale}.$$

$\langle X, Y \rangle = 0$ のとき, X と Y は直交するという.

$\mathcal{M}_d \equiv \{X \in \mathcal{M} \ ; \ \forall Y \in \mathcal{M}_c, \ \langle X, Y \rangle = 0\}$

◎ $X^n, X \in \mathcal{M}$.

$$X^n \longrightarrow X \quad (\text{in } \mathcal{M}) \quad \text{as } n \to \infty$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} E\{(X_t^n - X_t)^2\} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \qquad \forall t \geq 0.$$

$\mathcal{M}_c$, $\mathcal{M}_d$, $\mathcal{M}$ は上の limit の意味で閉じている.

◎ $X \in \mathcal{M}$ は, $X = X^c + X^d \qquad X^c \in \mathcal{M}_c, \ X^d \in \mathcal{M}_d$

と一意に分解出来る.

$X, Y \in \mathcal{M}$ に対し,

$$[X, Y]_t \equiv \langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s \in \mathcal{A}$$

$$[X, X]_t \equiv [X]_t \qquad \text{但し} \quad \Delta X_s \equiv X_s - X_{s-}.$$

とおく.

$X \in \mathcal{M}$ に対し

$L^2(X) \equiv \{H = H_s(\omega) \ ; \ H$ は well measurable, $E[\int_0^t H_s^2 \, d[X]_s] < +\infty \ \forall t \geq 0\}$

<u>Theorem 0</u> (P. A. Meyer [2])

$\forall X \in \mathcal{M}$, $\forall H \in L^2(X)$

$\Rightarrow \exists_1 Y \in \mathcal{M}$, $[Y, M]_t = \int_0^t H_s \, d[X, M]_s$ for $\forall M \in \mathcal{M}$

上の Y を $\int H_s dX_s$ とかき，拡張された確率積分という。

とくに，$X \in \mathcal{M}_d \Rightarrow \int H_s dX_s \in \mathcal{M}_d$.

<u>Theorem 1</u>

$\exists M \in \mathcal{M}_d$; $\mathcal{M}_d = S[M] \equiv \left\{ \int H_s dM_s \,;\, H \in L^2(M) \right\}$

(証略)

<u>Remark 1</u>

上の M は一意でない

- T ; accessible $\Longleftrightarrow P(M_T = M_{T-} \,;\, T<\infty) = P(T<\infty)$
- T ; totally inaccessible $\Longleftrightarrow P(M_T \neq M_{T-} \,;\, T<\infty) = P(T<\infty)$

<u>Remark 2</u>

$A \in \mathcal{A}^+$, quasi-left continuous & purely discontinuous

$A \prec [M]$

$\Rightarrow \tilde{A} \prec \langle M \rangle$ ($\tilde{A} \in \mathcal{A}^+_c$, $A - \tilde{A} =$ martingale)

§3 Additive functional の場合

notation, definition については [1], [4] 参照.

・$(X_t, \mathcal{F}_t, \zeta, P_x, x \in E)$; Hunt process

Meyer の (L) を仮定する.

$\mathcal{M}(A) \equiv \{$ 平均0, 2乗可積分 additive functional $\}$

$\mathcal{M}_c(A) \equiv \{ \mathcal{M}(A)$ の元で continuous なもの $\}$

$\mathcal{M}_d(A) \equiv \{ \mathcal{M}(A)$ の元で $\mathcal{M}_c(A)$ と直交するもの $\}$

$X \in \mathcal{M}(A)$

$$L^2(X) \equiv \left\{ f = f(x,y) \; ; \; \begin{array}{l} f \text{ は } \mathbb{B}(E \times E)\text{-可測} \\ E_x\left[\int_0^t f^2(X_{s-}, X_s)\, d[X]_s\right] < +\infty \quad \forall t \geq 0, \forall x \end{array} \right\}$$

$\mathbb{B}(E \times E)$; $E \times E$ 上の有界な Borel function 全体.

Theorem 2

$X \in \mathcal{M}(A)$, $f \in L^2(X)$

$\Rightarrow \exists_1 Y \in \mathcal{M}(A)$,

$$[Y, M]_t = \int_0^t f(X_{s-}, X_s)\, d[X, M]_s \quad \text{for } \forall M \in \mathcal{M}(A)$$

$Y = \int f(X_{s-}, X_s)\, dX_s$ (確率積分) とかく.

$X \in \mathcal{M}_d(A) \Rightarrow Y \in \mathcal{M}_d(A)$

(証略)

Theorem 3

$\exists M \in \mathcal{M}_d(A)$;

$$\mathcal{M}_d(A) = S[M] = \left\{ \int f(x_{s-}, x_s)\, dM_s \ ;\ f \in L^2(M) \right\}$$

（証略）

Remark 3

上のMはpath x_tから具体的に与えることが出来る.

その時, $n(x, dy)$; kernel が存在して

$$\left\langle \int f(x_{s-}, x_s)\, dM_s \right\rangle_t = \int_0^t \int_E f^2(x_{s-}, y)\, n(x_{s-}, dy)\, d\langle M \rangle_s$$

となることも, 予想される。

文献

[1] H. Kunita & S. Watanabe ; On square integrable martingales. Nagoya Math. Jour. vol.30. (1967.)

[2]. P.A. Meyer ; Integrales Stochastiques I. II. III. IV. Seminaire de Probabilités. Univ. de Strasbourg (1966)

[3]. M. Motoo & S. Watanabe ; On a class of additive functionals of Markov Processes. Jour. of Math. of Kyoto. Univ. vol. 4. No. 3 (1965)

[4] S. Watanabe ; On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov process. Jap. Jour. of Math vol XXXIV (1964)